ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 23, Nos. 3–4, 1976

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU DE LA RÉSOLVANTE ET DES VALEURS PROPRES D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE NON NÉCESSAIREMENT AUTO-ADJOINT

BY

PHAM THE LAI

ABSTRACT

For a self-adjoint semi-bounded realization of a uniformly elliptic operator, S. Agmon gave the asymptotic development for the kernel of the resolvant and the asymptotic behavior for the eigenvalues. In this paper, we generalize those results to a not necessarily self-adjoint or semi-bounded realization of a uniformly elliptic operator.

## Introduction

Soit $\Omega$ un ouvert borné assez régulier de $\mathbf{R}^n$. Soit

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur différentiel d'ordre $2m$, à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbf{R}^n$. Nous supposons que $\mathcal{A}$ est positive et uniformément elliptique sur $\Omega$.

Un opérateur non borné $A$ dans $L_2(\Omega)$ est dit une réalisation de $\mathcal{A}$ si $A$ est un opérateur fermé tel que, pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, le domaine de $A$, $u$ est solution, au sens des distributions, de l'équation:

$$\mathcal{A}(x, D)u = Au.$$

De nombreux auteurs ont étudié le comportement asymptotique des valeurs propres de $A$ dans le cas où $A$ est auto-adjoint, semi-borné (pour des références, voir S. Agmon [4]). Le résultat le plus précis, dans la situation décrite ci-dessus, est obtenu par S. Agmon [4]:

Received March 1, 1975

$$N(t) = \sum_{\lambda_j \leqq t} 1 = \gamma t^{n/2m} + o(t^{(n-\theta)/2m}) \qquad t \to +\infty$$

pour tout $\theta < 1/2$, $\gamma$ est une constante bien connue.

Toujours dans le cas auto-disjoint, semi-borné, le comportement asymptotique de la résolvante est étudié par S. Agmon-Y. Kannai [5], puis S. Agmon [4]. Des généralisations sont donées par R. Beals [6], K. Maruo-H. Tanabe [9] au cas où les coefficients de $\mathscr{A}$ ne sont pas nécessairement $\mathscr{C}^\infty$.

Dans [3], S. Agmon a considéré le cas où $A$ est auto-disjoint non nécessairement semi-borné et a obtenu un comportement asymptotique des valeurs propres, sans estimation de reste:

$$N_+(t) = \sum_{0 \leqq \lambda_j \leqq t} 1 = \gamma t^{n/2m} + o(t^{n/2m}) \quad t \to +\infty$$

$$N_-(t) = \sum_{-t \leqq \lambda_j < 0} 1 = o(t^{n/2m}) \quad t \to +\infty.$$

Le cas où $A$ est non auto-adjoint, avec une condensation du spectre d'un seul coté est obtenu aussi par S. Agmon dans [2], sans estimation du reste:

$$N(t) = \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_j \leqq t} 1 = \gamma t^{n/2m} + o(t^{n/2m}) \quad t \to +\infty.$$

Nous envisageons dans ce travail le cas où $A$ est en pratique obtenu par la perturbation d'un opérateur auto-adjoint par un opérateur d'ordre $< 2m$ (voir l'hypothèse (iii) du Théorème 2.1 du Section 1).

Dans la cas particulier où $A$ est la réalisation correspondant à une forme sesquilinéaire fortement elliptique (donc $A$ est variationnel et a nécessairement un spectre qui se condense d'un seul côté), le premier résultat concernant du reste est obtenu par K. Maruo [8]:

$$N(t) = \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_j \leqq t} = \gamma t^{n/2m} + o(t^{(n-\theta)/2m}) \quad t \to \infty$$

pout tout $\theta < 1/2$.

Le cas général où le spectre s'étale dans les deux directions n'est pas encore étudié, à notre connaissance.

Le but de ce travail est de donner des résultats dans cette direction.

Nous obtenons ici un comportement asymptotique du noyau de la résolvante (Théorème 2.1 du Section 1): ce résultat généralise donc au cas non auto-adjoint, non semi-borné un résultat analogue de S. Agmon [4].

Utilisant ce développement du noyau de la résolvante, nous donnons

(Théorème 2.2 du Section 1) le comportement asymptotique des valeurs propres avec estimations des restes:

$$N_+(t) = \sum_{0 \leqq \mathrm{Re}\,\lambda_j \leqq t} = \gamma t^{n/2m} + o(t^{(n-\theta)/2}) \quad t \to +\infty$$

$$N_-(t) = \sum_{-t \leqq \mathrm{Re}\,\lambda_j < 0} = o(t^{(n-\theta)/2m}) \quad t \to +\infty$$

pour tout $\theta < 1/2$.

## 1. Definitions, notations et rappels

$\mathbf{R}^n$ désigne l'espace euclidien de dimension $n$, $\langle x, \xi \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$. Les différentes normes recontrées seront notées $|\ \ |$, sauf mention du contraire. Nous utilisons les notations classiques suivantes:

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}, i = \sqrt{-1}, j = (1, \cdots, n)$$

$$D = (D_1, \cdots, D_n), D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$$

pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-indice d'entiers $\geqq 0$.

$\mathcal{S}$ désigne l'espace de Schwartz des fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}^n$ à décroissance rapide. Si $u \in \mathcal{S}$, $\hat{u}$ désigne sa transformée de Fourier:

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle \xi, x\rangle} u(x) dx.$$

$\mathcal{S}'$ désigne l'espace de Schwartz des distributions tempérées; on note encore par $\hat{u}$ la distribution, transformée de Fourier de $u \in \mathcal{S}'$.

Pour $m$ réel quelconque, $H_m$ est l'espace des distributions tempérées $u$ telle que $\hat{u}$ soit une fonction vérifiant

$$\int (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

$H_m$ est muni de la norme hilbertienne naturelle:

$$|u|_m = \left( \int (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Nous utiliserons quelques éléments de calcul des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbf{R}^n$ (cf. [7], [13]).

Dans la suite, nous notons $\mathscr{C}^\infty_*$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ définie sur $\mathbf{R}^n$, constantes sur un voisinage de l'infini; ce sont donc des fonctions de la forme $C + u$, avec $u$, $\mathscr{C}^\infty$ à support compact[†].

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$. $L_2(\Omega)$ désigne l'espace des (classes) de fonctions de carré intégrable sur $\Omega$, de produit scalaire:

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Pour $m$ entier $\geqq 0$, $H_m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel avec la norme hilbertienne:

$$| u |_{m,\Omega} = \Big( \sum_{|\alpha| \leqq m} \int_\Omega | D^\alpha u |^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Il est bien connu que, lorsque $\Omega = \mathbf{R}^n$ et $m$ entier, la présente définition et la précédente donnent le même espace avec des normes équivalentes.

Nous aurons à considérer des opérateurs continus $T$ de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$. La norme de $T$ sera notée $\| t \|_{0,0}$.

Si $T$ a une image dans $H_m(\Omega)$, on vérifie que $T$ est continue de $L_2(\Omega)$ dans $H_m(\Omega)$ et la norme de $T$ de $L_2(\Omega)$ dans $H_m(\Omega)$ sera notée $\| T \|_{0,m}$.

Notons aussi $H_{-m}(\Omega)$ l'anti-dual; alors on a:

$$H_m(\Omega) \underset{\to}{\subset} L_2(\Omega) \underset{\to}{\subset} H_{-m}(\Omega)$$

avec injections continues et images denses.

Si $T$ a un prolongement continu de $H_{-m}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, la norme de ce prolongement sera notée $\| T \|_{-m,0}$.

Nous utiliserons le résultat suivant, qui sera essentiel pour toute la suite. C'est le:

THEOREME DU NOYAU D'AGMAN. *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$ vérifiant la propriété du cône. Soit $T$ un opérateur continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$. Supposons que $T$ a une image dans $H_m(\Omega)$ et que $T$ possède un prolongement continu de $H_{-m}(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ avec $m > n$. Alors $T$ est un opérateur intégral*

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y) dy \quad f \in L_2(\Omega)$$

*avec un noyau $K(x, y)$ continu et borné sur $\Omega \times \Omega$ vérifiant*:

[†]Nous adoptons cette définition de $\mathscr{C}^\infty_*$ pour simplifier certains calculs; on peut la remplacer par les fonctions de la forme $C + u$ avec $u \in \mathscr{S}$.

$$|K(x,y)| \leqq C(\|T\|_{0,m}\|T\|_{-m,0})^{n/2m}\|T\|_{0,0}^{1-(n/m)}$$

*avec $C$ une constante ne dépendant que de $m, n$ et $\Omega$.*

*$K(x,y)$ est appelé le noyau d'Agmon associé à $T$.*

REMARQUE. Le théorème précédent, sous une formulation différente, est essentiellement dù à S. Agmon [3]. Nous avons établi dans [10] un résultat de même nature, de charactère abstrait dont l'application aux espaces de Sobolev donne ce théorème du noyau d'Agmon. La formulation énoncée dans [10] est aussi différente (elle fait intervenir l'adjoint $T^*$ de $T$), mais on vérifie aisément que les deux énoncés sont équivalents.

## 2. Enonce des resultats essentiels

Soit

$$\mathcal{A}(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

un opérateur d'ordre $2m$. Nous faisons les hypothèses (H) suivantes:

$\Omega$ est un ouvert borné, ayant la propriété du cône;

les coefficients $a_\alpha$ sont des restrictions à $\Omega$ de fonctions appartenant à $\mathscr{C}^\infty_*$.

$\mathcal{A}(x,D)$ est positive et uniformément elliptique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C$ telle que:

$$\mathcal{A}'(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geqq C|\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Concernant le développement asymptotique du noyau de la résolvante d'une réalisation de $\mathcal{A}$, nous avons le:

THEOREME 2.1. *Soit $A$ une réalisation dans $L_2(\Omega)$ de l'opérateur différentiel $\mathcal{A}(x,D)$ d'ordre $2m$. Nous faisons les hypothèses:*

(i) *$\mathcal{A}(x,D)$ vérifie* (H)

(ii) *Le domaine de $A$ vérifie: $\mathcal{D}(A)\subset H_{2m}(\Omega)$*

*L'ensemble résolvant de $A$ est non vide*

(iii) *$(A'u,u)_{0,\Omega}$ est réel pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $A'u$ étant la distribution (qui est dans $L_2(\Omega)$) $\mathcal{A}'(x,D)u$.*

*Alors:*

(a) *Il existe une constante $c>0$ telle que si $\mathcal{R}$ est la région*

$$\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbf{C}; |\operatorname{Im}\lambda| \geqq c(1+|\lambda|)^{1-(1/2m)}\}$$

*$\mathcal{R}$ est contenue dans l'ensemble résolvant de $A$. La résolvant est compacte.*

*Supposons de plus*:

(iv) $2m > n = \dim \Omega$.

(v) *L'adjoint $A^*$ de $A$ est une réalisation dans $L_2(\Omega)$ de l'adjoint formel $\mathscr{A}^*(x, D)$ de $\mathscr{A}(x, D)$ et vérifie $\mathscr{D}(A^*) \subset H_{2m}(\Omega)$.*

*Alors*:

(b) *Pour tout $\lambda \in \mathscr{R}$, $(A - \lambda)^{-1}$ est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon associé $G_\lambda(x, y)$ est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$.*

(c) *$G_\lambda(x, x)$ a un comportement asymptotique*:

$$G_\lambda(x,x) \sim (-\lambda)^{(n/2m)-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x)(-\lambda)^{-j/2m}$$

*dans la région $\mathscr{R}$, dans le sens suivant*:

*Pour tout entier $N \geqq 1$, $0 \leqq \theta < 1/2$, $p \geqq 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que*:

$$\left| G_\lambda(x,x) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j(x)(-\lambda)^{(n-2m-j)/2m} \right| \tag{2.1}$$

$$\leqq c\,|\lambda|^{n/2m}\left[ |\lambda|^{-(2m+N)/2m} + \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\left( \frac{|\lambda|^{(2m-1)/2m}}{\delta(x)\,|\mathrm{Im}\,\lambda|} \right)^p \right]$$

*pour tout $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathscr{R}$ tel que $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{(2m-\theta)/2m}$, $|\lambda| \geqq 1$.*

*Dans ces formules, $(-\lambda)^{-j/2m}$ est la détermination holomorphe de la puissance dans le plan complexe privé de $\mathbf{R}_+$, qui est positive sur le demi-axe négatif, $d(\lambda)$ est la distance de $\lambda$ à $\mathbf{R}_+$, $\delta(x) = \min(1, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$ et $c_j(x)$ sont des fonctions appartenant à $\mathscr{C}^\infty_*$, entièrement déterminées par les coefficients de $\mathscr{A}$. En particulier*:

$$c_0(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} [\mathscr{A}'(x,\xi) + 1]^{-1}\, d\xi. \tag{2.2}$$

Concernant le spectre de $A$, nous avons le:

THEOREME 2.2. *Soit $A$ une réalisation dans $L_2(\Omega)$ de l'opérateur différentiel $\mathscr{A}(x, D)$ d'ordre $2m$. Nous faisons les hypothèses* (i), (ii) *et* (iii) *du Théorème* 2.1.

*Supposons de plus*:

(i) *Il existe un entier $k$ impair $k > n/(2m)$, tel que*:

$$\mathscr{D}(A^k) \subset H_{2km}(\Omega)$$

*et que $(A^k)^*$ vérifie l'hypothèse* (v) *du Théorème* 2.1 *si $2m \leqq n$.*

(ii) *$\Omega$ est suffisament régulier pour que l'on ait*:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \delta(x)^{-1} dx \leqq c\,|\log \varepsilon\,|\,; \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} dx \leqq c\varepsilon$$

*pout tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $c$ étant une constante indépendante de $\varepsilon$.*

*Dans ces intégrales,* $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \delta(x) > \varepsilon\}$.

*Soit* $(\lambda_j)$ *la suite des valeurs propres de* $A$, *rangée dans l'ordre croissant des modules (chaque* $\lambda_j$ *étant répétée suivant la multiplicité) et notons:*

$$N_+(t) = \sum_{0 \leqq \operatorname{Re} \lambda_j \leqq t} 1, \quad N_-(t) = \sum_{-t \leqq \operatorname{Re} \lambda_j < 0} 1.$$

*Alors, nous avons les formules asymptotiques:*

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} N_+(t) &= \gamma t^{n/2m} + o(t^{(n-\theta)/2m}) \quad t \to +\infty \\ N_-(t) &= o(t^{(n-\theta)/2m}) \quad t \to +\infty \end{aligned}$$

*pour tout* $\theta < 1/2$. $\gamma$ *est la constante:*

$$\gamma = (2\pi)^{-n} \int_\Omega dx \int_{\mathscr{A}'(x,\xi)<1} d\xi.$$

Remarques. 1) Dans le cas où $\mathscr{A}'(x, D)$ est à coefficients constants, le Théorème 2.1 peut être amélioré: nous avons (2.1) avec $0 \leqq \theta < 1$ (voir remarque qui suit le Lemme 3.3). Il est plausible de penser que (2.3) pourrait être amélioré dans le même sens: c'est un problème non encore résolu à notre connaissance (dans le cas non auto-adjoint). Il est facile de voir, en effet, que dans le cas où $A$ est auto-adjoint, (2.3) est vrai avec $0 \leqq \theta < 1$.

2) Nous avons supposé que $\mathscr{A}'(x, \xi) \geqq C|\xi|^{2m}$, donc de signe constant. Il est possible d'étudier le comportement de $N_+(t)$ et $N_-(t)$ pour des opérateurs $\mathscr{A}(x, D)$ ne possèdant pas cette propriété (cas des équations différentielles par exemple); dans ce cas, il n'y a pas de prédominance de $N_+$ par rapport à $N_-$.

3) Il est possible d'entendre nos résultats au cas où les coefficients de $\mathscr{A}$ ne sont pas nécessairement $\mathscr{C}^\infty$, mais vérifiant une condition de Hölder (dans le cas auto-adjoint, semi-borné, cf. [6], [9]).

4) Il est aisé d'éntendre nos résultats aux systèmes elliptiques.

## 3. Developpement asymptotique du noyau de la resolvante. Le cas de l'espace entier $\mathbf{R}^n$

Nous considérons ici le cas d'un opérateur différentiel $\mathscr{A}(x, D)$ d'ordre $2m$. Nous faisons dans tout ce paragraphe des hypothèses:

(3.1) Les coefficients de $\mathscr{A}$ sont dans $\mathscr{C}^\infty_*$;

(3.2) $\mathscr{A}$ est positive et uniformément elliptique sur $\mathbf{R}^n$;

(3.3) $\mathscr{A}'(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ est formellement auto-adjoint.

**3.a. Quelques lemmes.** Considérant $\mathscr{A}$ comme opérateur dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ avec pour domaine $\mathscr{S}$, nous notons $A_0$ sa fermeture. Il est bien connu que le domaine $\mathscr{D}(A_0)$ de $A_0$ est $H_{2m}(\mathbf{R}^n)$ et que $A_0$ est l'unique réalisation de $\mathscr{A}$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$.

De plus, en utilisant l'inégalité de Garding, on voit qu'il existe $\lambda_0 \geqq 0$ tel que $(A_0 - \lambda)^{-1}$ existe pour $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\lambda_0 \geqq \operatorname{Re} \lambda$ (cf. [2]).

Le lemme suivant, qui est dù essentiellement à S. Agmon [2], précise davantage la localisation de l'ensemble résolvant de $A$. C'est le:

LEMME 3.1. *Il existe deux constantes $\lambda_0 \geqq 0$ et $C > 0$ tel que la région $\mathscr{R}_0 = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \lambda_0 \geqq \operatorname{Re}\lambda\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C};\ |\operatorname{Im}\lambda| \geqq C(1 + |\lambda|)^{1-(1/2m)}$ est dans l'ensemble résolvant de $A_0$.*

*De plus, il existe $C > 0$ tel que:*

$$\|(A_0 - \lambda)^{-1}\|_{0,0} \leqq \frac{C}{d(\lambda)} \quad pour\ \lambda \in \mathscr{R}_0. \tag{3.4}$$

Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, notons $\sigma_{\mathscr{A}-\lambda}$ le symbole de $\mathscr{A} - \lambda$. C'est une somme:

$$\sigma_{\mathscr{A}-\lambda} = \sum_{j=0}^{2m} a_j \tag{3.5}$$

avec $a_j$ définies par les formules:

$$a_{2m}(x, \xi; \lambda) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha - \lambda \tag{3.6}$$

$$a_j(x, \xi; \lambda) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad pour\ 0 \leqq j \leqq 2m - 1. \tag{3.7}$$

Ainsi, le paramètre $\lambda$ entre dans l'homogénéité des symboles $a_j$ par la formule:

$$a_j(x, t\xi; t^{2m}\lambda) = t^j a_j(x, \xi; \lambda) \quad pour\ 0 \leqq j \leqq 2m. \tag{3.8}$$

Pour approcher $(\mathscr{A} - \lambda)^{-1}$, nous allons construire classiquement (cf. [6], [14]) une paramétrix de la manière suivante: C'est un opérateur pseudo-différentiel dépendant du paramètre $\lambda \notin \mathbf{R}_+$ dont le symbole est une somme $\sum_{j=0}^{\infty} b_{-2m-j}$; les $b_{-2m-j}$ étant définies par le formule asymptotique:

$$\sigma_{\mathscr{A}-\lambda} \circ \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_{-2m-j} \right) = 1. \tag{3.9}$$

Ici $\circ$ désigne la composition des symboles des opérateurs pseudo-différentiels (cf. [13]). Ecrivant (3.9) explicitement, nous avons:

$$b_{-2m}a_{2m} = 1 \tag{3.10}$$

et pour $j \geqq 1$:

$$(3.11) \qquad a_{2m}b_{-2m-j} + \sum \frac{1}{\alpha!}(\partial)^\alpha a_{2m-k}(D)^\alpha b_{-2m-l} = 0^\dagger$$

où la somme dans (3.11) est prise pour $l < j$ et $|\alpha| + k + l = j$.

Comme $\lambda \notin \mathbf{R}_+$ et $\mathscr{A}'(x, \xi)$ est positive pour tout $x$, $\xi$, l'équation (3.10) est résoluble. Les équations (3.10) et (3.11) définissent alors tous les $b_{-2m-j}$.

LEMME 3.2 (a) *$b_{-2m-j}$ est positivement homogène en $\xi$, $\lambda$ de degré $-2m-j$ (c'est-à-dire que l'on a:*

$$b_{-2m-j}(x, t\xi; t^{2m}\lambda) = t^{-2m-j}b_{-2m-j}(x, \xi; \lambda)).$$

b) *Comme fonction de $x$, $b_{-2m-j}$ est dans $\mathscr{C}^\infty_*$.*

c) *Comme fonction de $\xi$, $\lambda$, $b_{-2m-j}$ est analytique.*

PREUVE. Pour $b_{-2m}$, la vérification des propriétés énoncées est évidente grâce à (3.2) et (3.10). Pour les $b_{-2m-j}$, la preuve se fait par récurrence en utilisant (3.11).

En utilisant les résultats de [6], nous obtenons sans peine le:

LEMME 3.3 *Pout tout $j \geqq 0$ et pour tout multi-indice $\alpha$, il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$(3.12) \qquad \left|D^\alpha b_{-2m-j}\right| \leqq c\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{1+2j+|\alpha|}\left[\sum_{k=0}^{2j+|\alpha|}\left(\frac{1+|\xi|}{1+|\xi|+|\lambda|^{1/2m}}\right)^{2m(k+1)}\right](1+|\xi|)^{-2m-j}$$

*pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \notin \mathbf{R}^+$.*

REMARQUE. Dans le cas où $\mathscr{A}'(x, D)$, la partie principale de $\mathscr{A}(x, D)$, est à coefficients constants, le résultat (3.12) de ce lemme peut être amélioré par l'estimation suivante:

Pour tout $j \geqq 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$\left|D^\alpha b_{-2m-j}\right| \leqq c\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{1+j}\left[\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{1+|\xi|}{1+|\xi|+|\lambda|^{1/2m}}\right)^{2m(k+1)}\right](1+|\xi|)^{-2m-j}$$

pour tout $\alpha$ multi-indice, $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \notin \mathbf{R}^+$.

C'est essentiellement cette amélioration qui entraine la validité de (2.1) du Théorème 2.1 avec $0 \leqq \theta < 1$ dans le cas présent. Nous laissons au lecteur des détails de cette preuve, car elle est analogue à celle qui va suivre.

Ayant étudié le comportement, par rapport au paramètre $\lambda$, des symboles $b_{-2m-j}$, étudions maintenant les opérateurs pseudo-différentiels associés.

$^\dagger$ Rappelons que nous notons $D^\alpha = (-i(\partial/\partial x_1))^{\alpha_1}\cdots(-i(\partial/\partial x_n))^{\alpha_n}$ la dérivation par rapport à $x$ et $\partial^\alpha = (\partial/\partial\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial\xi_n)^{\alpha_n}$ la dérivation par rapport à $\xi$.

Pour $j \geqq 0$, $\alpha$ et $\beta$ multi-indices, considérons les opérateurs:

$$\mathrm{Op}(\xi^\beta D^\alpha b_{-2m-j})f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i(x,\xi)} \xi^\beta D^\alpha b_{-2m-j}(x,\xi;\lambda)\hat{f}(\xi)d\xi$$

pour $f \in \mathcal{S}$.

Il est facile de vérifier grâce aux rappels du Section 1 et du Lemme 3.2 que $\mathrm{Op}(\xi^\beta D^\alpha b_{-2m-j})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-(2m+j)+|\beta|$. De manière précise, nous avons le résultat suivant, que nous énonçons, pour simplifier, pour $|\beta| \leqq 2m$:

Lemme 3.4. *Pour $j \geqq 0$, $\alpha$ et $\beta$ multi-indices, $|\beta| \leqq 2m$, $t$ et $s$ réels vérifiant $s \leqq t \leqq s + 2m + j - |\beta|$, il existe une constante $c > 0$ telle que*:

$$|\mathrm{Op}(\xi^\beta D^\alpha b_{-2m-j})f|_t \leqq c\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2+2j+|\alpha|+|t|+n} |\lambda|^{(-2m-j+t-s+|\beta|)/2m}|f|_s \tag{3.13}$$

*pour tout $f \in \mathcal{S}$ et $\lambda \notin \mathbf{R}^+$.*

Preuve. Elle est analogue à celle donnée dans [7].

Nous désirons maintenant montrer que, pour $N$ entrier $\geqq 1$, la paramétrix

$$\mathcal{P}_{N,\lambda} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Op}(b_{-2m-j})$$

est une bonne approximation de la résolvante $(A-\lambda)^{-1}$ (pour $N$ assez grand) lorsque $\lambda$ parcourt une région à déterminer.

Il est clair que $\mathcal{P}_N$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-2m$.

Notons $\mathcal{A}$ l'opérateur (pseudo-) différentiel

$$\mathcal{A}f(x) = \mathcal{A}(x,D)f \quad f \in \mathcal{S}.$$

Considérons alors l'opérateur pseudo-différentiel

$$\delta_{N,\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda)\circ \mathcal{P}_{N,\lambda} - I \tag{3.14}$$

($I$ identité).

Nous désirons expliciter le symbole $\delta_{N,\lambda}$. Ce calcul est déjà décrit dans le travail de R. Seeley (cf. [14]), mais nous devons ici expliciter davantage les termes de ce symbole à cause du Lemme 3.3 qui montre que l'ordre de dérivation $\alpha$ entre en compte de manière essentielle dans notre cas (dans le cas de R. Seeley, l'étude se fait pour $\lambda$ appartenant dans un *secteur* de plan complexe, ce qui entraine que $d(\lambda) \sim |\lambda|$; dans ce cas l'ordre de dérivation $\alpha$ qui figure dans les termes du symbole de $\delta_{N,\lambda}$ n'a pas d'influence sur les estimations en fonctions de $\lambda$ ).

En utilisant la formule de Leibniz, nous avons, pour $j > 0$, $\beta$ multi indice et $f \in \mathcal{S}$, la relation:

$$D^{\beta} \operatorname{Op}(b_{-2m-j})f = (2\pi)^{-n/2} \sum_{\alpha \leqq \beta} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \partial^{\alpha} \xi^{\beta} D^{\alpha} b_{-2m-j}(x, \xi; \lambda) \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{3.15}$$

Remarquons, que l'on a, pour tout multi-indice $\alpha \neq 0$ et $0 \leqq p \leqq 2m$:

$$\partial^{\alpha} a_{2m-p} = \sum_{\substack{\alpha \leqq \beta \\ |\beta| = 2m-p}} a_{\beta}(x) \partial^{\alpha} \xi^{\beta}. \tag{3.16}$$

Alors (3.15) et (3.16) montrent que l'on a:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} - \lambda) \circ \operatorname{Op}(b_{-2m-j}) f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a_{2m}(x, \xi; \lambda) b_{-2m-j}(x, \xi; \lambda) \hat{f}(\xi) d\xi \\
&+ (2\pi)^{-n/2} \sum_{|\beta| \leqq 2m} \sum_{\substack{\alpha \leqq \beta \\ \alpha \neq 0}} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a_{\beta} \partial^{\alpha} \xi^{\beta} D^{\alpha} b_{-2m-j} \hat{f} d\xi \\
&+ (2\pi)^{-n/2} \sum_{p=1}^{2m} \sum_{|\alpha| \leqq 2m-p} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \partial^{\alpha} a_{2m-p} D^{\alpha} b_{-2m-j} \hat{f} d\xi.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tenant compte des relations (3.10) (3.11) qui déterminent en $b_{-2m-j}$, les relations (3.14) (3.17) prouvent que l'on a:

$$\begin{aligned}
\delta_{N,\lambda} f &= (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{|\beta| = 2m} \sum_{\substack{|\alpha| > N-j-1 \\ \alpha \leqq \beta}} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a_{\beta} \partial^{\alpha} \xi^{\beta} D^{\alpha} b_{-2m-j} \hat{f} d\xi \\
&+ (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{N-2} \sum_{p=1}^{2m} \sum_{\substack{|\alpha| > p-(N-j-1) \\ |\alpha| \leqq 2m-p}} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \partial^{\alpha} a_{2m-p} D^{\alpha} b_{-2m-j} \hat{f} d\xi.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.18) prouve que le symbole de $\delta_{N,\lambda}$ est une somme finie de termes du type:

$$u = c(x) \partial^{\alpha} \xi^{\beta} D^{\alpha} b_{-2m-j} \tag{3.19}$$

avec $c \in \mathcal{C}_*^{\infty}$ et $|\beta| = 2m$; $|\alpha| > N - j - 1$; $j \in [0, N-1]$ et du type:

$$v = \partial^{\alpha} a_{2m-p} D^{\alpha} b_{-2m-j} \tag{3.20}$$

avec $|\alpha| > p - (N - j - 1)$; $p \in [1, 2m]$; $j \in [0, N-2]$.

Nous avons ainsi le:

LEMME 3.5. *Pour tout $N$ entier $\geqq 1$, $\delta_{N,\lambda}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-N$.*

*Pour tout N, t et s vérifiant $s \leqq t \leqq s+N$, il existe une constante $c>0$ telle que:*

$$|\delta_{N,\lambda} f|_t \leqq c\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2m+n+2N+|t|} |\lambda|^{(-N+t-s)/2m} |f|_s \tag{3.21}$$

*pour tout $f \in \mathcal{S}$ et $\lambda \notin \mathbf{R}_+$.*

PREUVE. Les opérateurs $u$, $v$ donnés par (3.19) (3.20) sont des sommes finies d'opérateurs du type:

$$\operatorname{Op}(c(x)\xi^\gamma D^\alpha b_{-2m-j})$$

avec $c \in \mathscr{C}_*^\infty$ et

$$-2m-j+|\gamma| < -N+1. \tag{3.22}$$

En effet, pour un terme de type $u$, (3.22) provient de (3.19) car $-j-|\alpha| < -N+1$.

Pour un terme de type $v$, (3.22) provient de (3.20) car $-j+p-|\alpha| < -N+1$.

(3.22) prouve donc que $\delta_{N,\lambda}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-N$.

L'estimation (3.13) du Lemme 3.4 montre que l'on a:

$$|\operatorname{Op}(c\xi^\gamma D^\alpha b_{-2m-j})f|_t \leqq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2+2j+|\alpha|+|t|+n} |\lambda|^{(-2m-j+t-s+|\gamma|)/2m} |f|_s \tag{3.23}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}$ et $\lambda \notin \mathbf{R}_+$.

(3.22), (3.23) et (3.19) prouvent que l'on a, pour un opérateur de type $u$:

$$|\operatorname{Op}(uf)|_t \leqq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2m+n+2N+|t|} |\lambda|^{(-N+t-s)/2m} |f|_s. \tag{3.24}$$

(3.22), (3.23) et (3.20) prouvent que l'on a, pour un opérateur de type $v$:

$$|\operatorname{Op}(vf)|_s \leqq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2m+n+2N-3+|t|} |\lambda|^{(-N+t-s)/2m} |f|_s. \tag{3.25}$$

Alors (3.18), (3.24) et (3.25) prouvent (3.21).

**3.b. Noyau de la résolvante.** Nous avons maintenant le résultat suivant qui montre que la paramétrix $\mathscr{P}_{N,\lambda}$ est une bonne approximation de la résolvante. C'est le:

THEOREME 3.6 *Soit $\mathscr{A}(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre $2m>n$ et supposons qu'il vérifie les hypothèses* (3.1) (3.2) (3.3).

*Soit $A_0$ l'unique réalisation dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ de $\mathscr{A}$. Il existe une région $\mathscr{R}_0$ de la* *forme du Lemme* 3.1 *tel que pour* $\lambda \in \mathcal{R}_0$, *la résolvante* $(A_0 - \lambda)^{-1}$ *existe et est un opérateur intégral dont le noyau d'Agmon associé* $G_\lambda(x, y)$ *est continu et borné sur* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

$G_\lambda(x, y)$ *a un comportement asymptotique*

$$G_\lambda(x, y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi\rangle} b_{-2m-j}(x, \xi; \lambda) d\xi$$

*dans la région* $\mathcal{R}_0$, *dans le sens suivant*:

*Pour tout entier* $N \geqq 1$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que*:

$$\left| G_\lambda(x, y) - \sum_{j=0}^{N-1} (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi\rangle} b_{-2m-j}(x, \xi, \lambda) d\xi \right| \tag{3.26}$$

$$\leqq C \frac{|\lambda|^{n/2m}}{d(\lambda)} |\lambda|^{-N/2m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{3m+n+2N+1}$$

*pour tout* $x$, $y \in \mathbf{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $|\lambda| \geqq 1$.

Preuve. Le Lemme 3.1 montre qu'il existe une région de la forme indiquée située dans l'ensemble résolvant de $A$.

En considérant l'adjoint formel $\mathcal{A}^*(x, D)$ de $\mathcal{A}(x, D)$, les hypothèses (3.1) (3.2) (3.3) sont vérifiées pour $\mathcal{A}^*$ car $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ ont même parties principales. On vérifie aussi que l'unique réalisation $A_0^*$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ de $\mathcal{A}^*$ est l'adjoint hilbertien de $A_0$ (au sens des opérateurs non bornés dans $L_2(\mathbf{R}^n)$).

Le Lemme 3.1 est donc encore applicable à $A_0^*$; ceci prouve l'existence d'une région $\mathcal{R}_0$ commune à $A_0$ et $A_0^*$, de la forme de ce lemme, pour laquelle $(A_0 - \lambda)^{-1}$ et $(A_0^* - \lambda)^{-1}$ existent pour $\lambda \in \mathcal{R}_0$ et vérifient:

$$\|(A_0 - \lambda)^{-1}\|_{0,0} \leqq \frac{C}{d(\lambda)}; \|(A_0^* - \lambda)^{-1}\| \leqq \frac{C}{d(\lambda)}. \tag{3.27}$$

L'adjoint hilbertien de $(A_0 - \lambda)^{-1}$ est $(A_0^* - \bar{\lambda})^{-1}$. Comme $(A_0^* - \bar{\lambda})^{-1}$ a une image dans $H_{2m}(\mathbf{R}^n)$, la remarque du Section 1 prouve que l'opérateur $(A_0 - \lambda)^{-1}$ se prolonge en un opérateur continu de $H_{-2m}(\mathbf{R}^n)$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$, pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$.

Comme $2m > n$, nous pouvons appliquer le théorème du noyau d'Agmon à l'opérateur $(A_0 - \lambda)^{-1}$; ceci prouve que $(A_0 - \lambda)^{-1}$ est intégral avec un noyau $G_\lambda(x, y)$ continu et borné sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$.

Il reste à prouver (3.26). Soit $N$ entier $\geqq 1$ fixé.

Pour tout $\lambda \notin \mathbf{R}_+$, $\mathcal{P}_{N,\lambda}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-2m$; notons $P_{N,\lambda}$ le prolongement continu de $L_2(\mathbf{R}^n)$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ de $\mathcal{P}_{N,\lambda}$. L'ordre de

$\mathscr{P}_{N,\lambda}$ étant égal à $-2m$, on voit que $P_{n,\lambda}$ a une image dans $H_{2m}(\mathbf{R}^n)$ et $P_{N,\lambda}$ est prolongeable en un opérateur continu de $H_{-2m}(\mathbf{R}^n)$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Si nous posons, pour $\lambda \in \mathscr{R}_0$:

$$T_{N,\lambda} = P_{N,\lambda} - (A - \lambda)^{-1} \tag{3.28}$$

les considérations précédentes prouvent, d'après le théorème du noyau d'Agmon, que $T_{N,\lambda}$ est intégral avec un noyau $K_{N,\lambda}(x, y)$ continu et borné sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Nous désirons estimer le noyau $K_{N,\lambda}$ en utilisant le même théorème; pour cela, il faut estimer les normes:

$$\| T_{N,\lambda} \|_{0,0}, \ \| T_{N,\lambda} \|_{0,2m}, \ \| T_{N,\lambda} \|_{-2m,0}.$$

Le théorème du graphe fermé prouve qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on a:

$$| f |_{2m} \leqq C(| A_0 f |_0 + | f |_0)\,; \ | f |_{2m} \leqq C(| A_0^* f |_0 + | f |_0) \tag{3.29}$$

pour tout $f \in H_{2m}(\mathbf{R}^n)$.

(3.27) et (3.29) prouvent que l'on a:

$$\| (A_0 - \lambda)^{-1} \|_{0,2m} \leqq C \frac{| \lambda |}{d(\lambda)}\,; \ \| (A_0 - \lambda)^{-1} \|_{-2m,0} \leqq C \frac{| \lambda |}{d(\lambda)} \tag{3.30}$$

pour tout $\lambda \in \mathscr{R}_0$, $| \lambda | \geqq 1$.

Remarquons maintenant que l'opérateur $(A_0 - \lambda) T_{N,\lambda} = (A_0 - \lambda) P_{N,\lambda} - I$ est évidement l'opérateur obtenu par prolongement continu de $L_2(\mathbf{R}^n)$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $\delta_{N,\lambda}$.

L'inégalité (3.21), appliquée au cas $t = s = 0$, prouve que l'on a:

$$\| (A_0 - \lambda) T_{N,\lambda} \|_{0,0} \leqq C \left( \frac{| \lambda |}{d(\lambda)} \right)^{2m+n+2N} | \lambda |^{-N/2m} \tag{3.31}$$

pour tout $\lambda \notin \mathbf{R}_+$.

(3.27) et (3.31) prouvent que l'on a:

$$\| T_{N,\lambda} \|_{0,0} \leqq C \frac{| \lambda |}{d(\lambda)}^{2m+n+2N|} \frac{| \lambda |^{-N/2m}}{d(\lambda)} \tag{3.32}$$

pout tout $\lambda \in \mathscr{R}_0$, $| \lambda | \geqq 1$.

(3.30) et (3.31) prouvent que l'on a:

$$\| T_{N,\lambda} \|_{0,2m} \leqq C \left( \frac{| \lambda |}{d(\lambda)} \right)^{2m+n+2N+1} | \lambda |^{-N/2m} \tag{3.33}$$

pour tout $\lambda \in \mathscr{R}_0$, $| \lambda | \geqq 1$.

En vertu de ce qui précède, $(A_0 - \lambda)T_{N,\lambda}$ a un prolongement continu de $H_{-2m}(\mathbf{R}^n)$ dans $H_{-2m}(\mathbf{R}^n)$ et l'inégalité (3.21) appliquée au cas $t = s = -2m$ prouve que l'on a:

$$\|(A_0 - \lambda)T_{N,\lambda}\|_{-2m,-2m} \leqq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{4m+n+2N} |\lambda|^{-N/2m} \tag{3.34}$$

pour tout $\lambda \notin \mathbf{R}_+$.

(3.30) et (3.34) prouvent alors:

$$\|T_{N,\lambda}\|_{-2m,0} \leqq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{4m+n+2N+1} |\lambda|^{-N/2m} \tag{3.35}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $|\lambda| \geqq 1$.

(3.32) (3.33) (3.35) et le théorème du noyau d'Agmon montrent que l'on a l'estimation suivante pour le noyau $K_{N,\lambda}$ de $T_{N,\lambda}$:

$$|K_{N,\lambda}(x, y)| \leqq C\frac{|\lambda|^{n/2m}}{d(\lambda)} |\lambda|^{-N/2m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{3m+n+2N+1} \tag{3.36}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $|\lambda| \geqq 1$.

En vertu de (3.36), il reste, pour prouver (3.26), à vérifier que le noyau de $P_{N,\lambda}$ est:

$$\sum_{j=0}^{N-1} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} b_{-2m-j}(x, \xi; \lambda) d\xi$$

ce qui est évident en vertu de la définition de $P_{N,\lambda}$ et du théorème de Fubini.

Remarque. Ce résultat généralise au cas non auto-adjoint un résultat de S. Agmon-Y. Kannai (cf. [5]). Il est à remarquer que la preuve donnée ici est simple et entièrement différente de celle donnée par ces auteurs. On obtient ici un résultat plus précis car l'estimation du reste est uniforme en $x$, $y$.

Du Théorème 3.6, nous déduisont facilement le:

Corollaire 3.7. *Avec les hypothèses du Théorème* 3.6, *la fonction* $G_\lambda(x, x)$ *a un comportement asymptotique de la forme*:

$$G_\lambda(x, x) \sim (-\lambda)^{(n/2m)-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x)(-\lambda)^{-j/2m}$$

*avec*:

$$c_j(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} b_{-2m-j}(x, \xi; 1) d\xi \tag{3.37}$$

*dans le sens suivant*:

*Pour tout* $0 \leqq \theta < 1/2$, *tout entier* $N \geqq 1$, *il existe une constante* $C$ *telle que l'on a*:

$$(3.38) \qquad \left| G_\lambda(x,x) - (-\lambda)^{(n/2m)-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_j(x)(-\lambda)^{j/2m} \right| \leqq C \left|\lambda\right|^{(n-2m-N)/2m}$$

*pour tout* $x,\ y \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathcal{R}_0$ *vérifiant* $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/2m)}$ *et* $|\lambda| \geqq 1$.

## 4. Developpement asymptotique du noyau de la résolvante. Le cas d'un ouvert $\Omega$ borné de $R^n$

Nous considérons dans ce paragraphe un opérateur différentiel $\mathcal{A}(x,D)$ d'ordre $2m$ et $A$ une réalisation dans $L_2(\Omega)$ de $\mathcal{A}(x,D)$. Nous supposons les hypothèses (i), (ii), (iii) de Théorème 2.1 réalisées.

### 4.a. Quelques lemmes

LEMME 4.1 *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que si* $\mathcal{R}$ *est la région*

$$\mathcal{R} = \{\lambda \in C,\ |\operatorname{Im}\lambda| \geqq C(1+|\lambda|)^{1-(1/2m)},$$

$\mathcal{R}$ *est dans l'ensemble résolvant de* $A$. *La résolvante de* $A$ *est compacte.*

*De plus, on a*:

$$(4.1) \qquad \|(A-\lambda)^{-1}\|_{0,0} \leqq \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}$$

*pour* $\lambda \in \mathcal{R}$ *et* $|\lambda| \geqq 1$.

PREUVE. En vertu de l'hypothèse (iii), $(A'u, u)_{0,\Omega}$ est réelle pour $u \in \mathcal{D}(A)$; nous avons, pour une constante $c$ convenable:

$$(4.2) \qquad |\operatorname{Im}\lambda|\,|u|_{0,\Omega} \leqq |(A-\lambda)u|_{0,\Omega} + c\,|u|_{2m-1,\Omega}$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

En utilisant un résultat classique de l'interpolation des espaces de Sobolev, il est facile de voir que l'on a:

$$(4.3) \qquad |\operatorname{Im}\lambda|\,|u|_{0,\Omega} \leqq C\,|(A-\lambda)u|_{0,\Omega}$$

pour tout $\lambda$ vérifiant $|\operatorname{Im}\lambda| \geqq C(1+|\lambda|)^{1-(1/2m)}$, $|\lambda| \geqq 1$.

En vertu de l'hypothèse (ii), l'ensemble résolvant de $A$ est non vide; il existe $\lambda_0$ tel que $(A-\lambda_0)^{-1}$ existe. Comme $\Omega$ est borné et que $\mathcal{D}(A) \subset H_{2m}(\Omega)$, $(A-\lambda_0)^{-1}$ est un opérateur compact.

Comme

$$(A-\lambda)(A-\lambda_0)^{-1} = I + (\lambda - \lambda_0)(A-\lambda_0)^{-1}$$

l'opérateur $(A - \lambda)(A - \lambda_0)^{-1}$ a un indice nul, on en déduit que $A - \lambda$, en tant qu'opérateur de $\mathcal{D}(A)$ dans $L_2(\Omega)$ a un indice nul, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

Si $\mathcal{R}$ est la région définie avec la constante $C$ de la majoration (4,3), (4.3) montre que $A - \lambda$ est injective pour $\lambda \in \mathcal{R}$, donc inversible.

Nous en déduisons facilement le lemme.

REMARQUE. On a vu que dans le cas de l'espace entier $\mathbf{R}^n$, le spectre de $A$ a une condensation parabolique seulement dans une seule direction (l'axe réel positif) alors que dans le cas général, comme on vient de le voir, le spectre a une condensation parabolique dans les deux directions de $\mathbf{R}$.

Cela n'est pas étonnant car, dans le cas $\mathbf{R}^n$, la réalisation $A$ correspond à une problème de Dirichlet et l'on sait, d'après S. Agmon [1], que l'axe $\mathbf{R}_+$ est la seule direction de condensation du spectre pour la classe des opérateurs dit "absolument" elliptiques. Une réalisation de Dirichlet appartient à cette classe; les réalisations correspondant aux problèmes de "dérivées obliques" aussi.

Nous aurons à utiliser le résultat suivant de S. Agmon [4]:

LEMME 4.2. *Soit $\mathcal{R}$ une partie de* $\mathbf{C}$ *ne contenant pas l'axe réel et $T_\lambda$ un opérateur continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$ tel que son image ainsi que l'image de son adjoint $T_\lambda^*$ sont dans $H_{2m}(\Omega)$ avec $2m > n = \dim \Omega$.*

*Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$\| T_\lambda \|_{0,0} \leqq \frac{C}{|\operatorname{Im} \lambda|}$$

$$\| T_\lambda \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|}\,; \; \| T_\lambda^* \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

*Supposons qu'il existe deux opérateurs différentiels uniformément elliptiques, positifs $\mathcal{A}(x, D)$ et $\mathcal{A}_1(x, D)$, à coefficients dans $\mathscr{C}_*^\infty$ tels que:*

$$(\mathcal{A}(x, D) - \lambda) T_\lambda f = 0\,; \; (\mathcal{A}_1(x, D) - \bar{\lambda}) T_\lambda^* f = 0$$

*pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$ et $f \in L_2(\Omega)$.*

*Alors $T_\lambda$ est intégral avec un noyau d'Agmon associé continu et borné $K_\lambda(x, y)$, vérifiant:*

*Pour tout $p \geqq 0$, il existe une constante $C$ telle que:*

$$|K_\lambda(x, y)| \leqq C \frac{|\lambda|^{n/2m}}{|\operatorname{Im} \lambda|} \left( \frac{|\lambda|^{1-(1/2m)}}{\delta(x, y) |\operatorname{Im} \lambda|} \right)^p \tag{4.4}$$

*pour tout $x, y \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.*

*Dans* (4.4), *on a noté* $\delta(x, y) = \min\{1, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)\}$.

**4.b. Preuve du Théorème 2.1.** Les conclusions a) et b) proviennent de Lemme 4.1 et du théorème du noyau d'Agmon.

Passons à la preuve de c). Soit $A_0$ l'unique réalisation dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ de $\mathcal{A}(x, D)$ et soit $\mathcal{R}_0$ la région du Théorème 3.6.

Notons, pour $f \in L_2(\Omega)$ et $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $R_\lambda f$ la fonction de $L_2(\Omega)$ définie par restriction à $\Omega$ de $(A_0 - \lambda)^{-1} f_0$, où $f_0$ est le prolongement de $f$ à $\mathbf{R}^n$ en dehors de $\Omega$ par 0.

Il est clair que $R_\lambda$ est un opérateur continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, à image dans $H_{2m}(\Omega)$. Il est facile de vérifier que l'adjoint $R_\lambda^* f$ pour $f \in L_2(\Omega)$ est la restriction à $\Omega$ de $(A_0^* - \bar{\lambda})^{-1} f_0$.

Donc, l'image de $R_\lambda^*$ est aussi dans $H_{2m}(\Omega)$.

De plus, en vertu de (3.27) et (3.30), nous avons:

$$\| R_\lambda \|_{0,0} \leqq \frac{C}{d(\lambda)}; \| R_\lambda \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)}; \| R_\lambda^* \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \tag{4.5}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $|\lambda| \geqq 1$.

Soit maintenant $\mathcal{R}$ la région du Lemme 4.1 et pour $\lambda \in \mathcal{R}$, notons $G_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$. Alors $G_\lambda$ a une image dans $H_{2m}(\Omega)$.

En vertu de l'hypothèse ($\nu$), $A^*$ est une réalisation dans $L_2(\Omega)$ de l'adjoint formel $\mathcal{A}^*(x, D)$ de $\mathcal{A}(x, D)$. Pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $(A^* - \bar{\lambda})^{-1}$ existe car $(A - \lambda)^{-1}$ existe; donc $G_\lambda^*$ a aussi une image dans $H_{2m}(\Omega)$ car $\mathcal{D}(A^*) \subset H_{2m}(\Omega)$ par hypothèse.

D'après (4.1) et des inclusions $\mathcal{D}(A) \subset H_{2m}(\Omega)$, $\mathcal{D}(A^*) \subset H_{2m}(\Omega)$, nous obtenons aisément:

$$\| G_\lambda \|_{0,0} \leqq \frac{C}{|\operatorname{Im} \lambda|}; \| G_\lambda \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|}, \| G_\lambda^* \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|} \tag{4.6}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Comme l'on peut toujours supposer $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_0$, nous obtenons pour $T_\lambda = G_\lambda - R_\lambda$ les majorations, à partir de (4.5) et (4.6):

$$\| T_\lambda \| \leqq \frac{C}{|\operatorname{Im} \lambda|}, \| T_\lambda \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|}, \| T_\lambda^* \|_{0,2m} \leqq C \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|} \tag{4.7}$$

pour $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Par hypothèse, $A$ et $A^*$ sont des réalisations de $\mathcal{A}(x, D)$ et $\mathcal{A}^*(x, D)$; nous avons donc:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}(x, D) - \lambda) T_\lambda f = 0 \\ &(\mathcal{A}^*(x, D) - \bar{\lambda}) T_\lambda^* f = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

pour tout $f \in L_2(\Omega)$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.

L'hypothèse $2m > n$ et (4.12) (4.13) prouvent que l'on peut utiliser le Lemme 4.2. Le résultat (4.4) de ce lemme et (3.37) du Corollaire 3.7 prouvent l'estimation (2.1) du Théorème 2.1, ayant remarqué que le noyau $K_\lambda(x, y)$ de $T_\lambda$ est:

$$K_\lambda(x, y) = G_\lambda(x, y) - R_\lambda(x, y)$$

pour tout $x, y \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$.

## 5. Comportement asymptotique des valeurs propres

**5.a. Quelques lemmes. Le cas $2m > n$.** Dans cette section, nous allons d'abord établir quelques lemmes concernant la suite des valeurs propres $(\lambda_j)$ d'une réalisation $A$ d'un opérateur différentiel $\mathcal{A}(x, D)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1. Nous avons donc en particulier $2m > n$. Nous ferons aussi l'hypothèse (ii) du Théorème 2.2 c'est-à-dire que l'ouvert $\Omega$ est tel qu'il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{dx}{\delta(x)} \leqq C|\log \varepsilon|; \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} dx \leqq C\varepsilon \tag{5.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

Comme $2m > n$, il est alors bien connu que la série $\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j - \lambda)^{-1}$ est absolument convergente pour tout $\lambda$ appartenant dans l'ensemble résolvant de $A$.

Lemme 5.1 *Pour $0 \leqq \theta < 1/2$, il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} - (-\lambda)^{(n/2m)-1} \int_\Omega c_0(x)dx \right| \\ &\leqq C|\lambda|^{(n-2m-1)/2m} \left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|}\right)^2 \log|\lambda| \end{aligned} \tag{5.2}$$

*pour $\lambda \in \mathcal{R}$ tel que $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/2m)}$, $|\lambda| \geqq 1$.*

Preuve. Un résultat de S. Agmon [2] (qui étend le théorème bien connu de Mercer) prouve que l'on a:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = \int_\Omega G_\lambda(x, x)dx \tag{5.3}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$.

En vertu de (5.3), nous sommes conduits à estimer l'intégrale

$$I_\lambda = \int_\Omega [G_\lambda(x, x) - (-\lambda)^{(n/2m)-1} c_0(x)] dx.$$

Considérons la partition de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega\,;\ \delta(x) \leqq |\lambda|^{-1/2m}\} \text{ et } \Omega_2 = \{x \in \Omega\,;\ \delta(x) > |\lambda|^{-1/2m}\}.$$

Il est évident que l'on a:

$$|G_\lambda(x,x)| \leqq C\frac{|\lambda|^{n/2m}}{|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{5.4}$$

pour tout $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathscr{R}$.
La définition de $\Omega_1$ et l'inégalité (5.4) et l'hypothèse (5.1) prouvent que l'on a:

$$\left|\int_{\Omega_1}[G_\lambda(x,x) - (-\lambda)^{(n/2m)-1}c_0(x)]\,dx\right| \leqq C\frac{|\lambda|^{(n-1)/2m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{5.5}$$

L'utilisation de (2.1), pour $N = 1$, $p = 1$, l'hypothèse (5.1) de la définition de $\Omega_2$ prouvent que l'on a:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega_2}[G_\lambda(x,x) - (-\lambda)^{(n/2m)-1}c_0(x)]dx\right| \\ &\leqq C|\lambda|^{(n-2m-1)/2m}\left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^2 \log|\lambda|.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Alors (5.4) et (5.6) prouvent (5.2).

Remarque. Une conséquence immédiate de (5.2) est l'estimation suivante, qui sera utilisée dans la suite: pour $0 \leqq \theta < 1/2$, il existe $C > 0$ telle que:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j - \lambda}\right| \leqq C|\lambda|^{(n/2m)-1} \tag{5.7}$$

pour $\lambda \in \mathscr{R}$ tel que $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/2m)}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Lemme 5.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda} - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j - \lambda}\right| \leqq C|\lambda|^{(n-2m-1)/2m}\left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^2 \tag{5.8}$$

*pour tout $\lambda \in \mathscr{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.*

Preuve. Ecrivons, pour $\lambda \in \mathscr{R}$:

$$\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda} - \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = \frac{i\operatorname{Im}\lambda_j}{(\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda)(\lambda_j - \lambda)}. \tag{5.9}$$

Nous allons d'abord estimer le terme $|\operatorname{Im}\lambda_j / \operatorname{Re}\lambda_j - \lambda|$.

Ecrivons $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2$ avec

$$\mathbf{N}_1 = \{j \,;\, |\operatorname{Re} \lambda_j| > 2 |\operatorname{Re} \lambda|\}$$

$$\mathbf{N}_2 = \{j \,;\, |\operatorname{Re} \lambda_j| \leqq 2 |\operatorname{Re} \lambda|\}.$$

Pour $j \in \mathbf{N}_1$, nous utilisons la majoration:

$$\left|\frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda}\right| \leqq 2 \left|\frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Re} \lambda_j}\right|.$$

Comme $\lambda_j \notin \mathcal{R}$ et $j \in \mathbf{N}_1$, il existe une constante $C$ telle que:

$$\left|\frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda}\right| \leqq C |\lambda|^{-1/2m} \tag{5.10}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$ et $j \in \mathbf{N}_1$.

Pour $j \in \mathbf{N}_2$, nous utilisons la majoration

$$\left|\frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda}\right| \leqq \left|\frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Im} \lambda}\right|.$$

Comme $\lambda_j \notin \mathcal{R}$ et $j \in \mathbf{N}_2$, nous avons:

$$\left|\frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda}\right| \leqq C |\lambda|^{-1/2m} \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im} \lambda|} \tag{5.11}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$ et $j \in \mathbf{N}_2$.

(5.9) (5.10) et (5.11) prouvent que l'on a:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda}\right| \leqq C |\lambda|^{-1/2m} \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|}\right) \tag{5.12}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$.

Il reste à estimer $\Sigma_{j=0}^{\infty} 1/|\lambda_j - \lambda|$.

Pour cela, nous utilisons notre résultat établi dans [10] qui prouve que l'opérateur $Q_\lambda = [G_\lambda (G_\lambda)^*]^{1/2}$ (rappelons que $G_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$) est un opérateur continu de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$, évidemment auto-adjoint positif, et a une image dans l'image de $G_\lambda$, donc dans $H_{2m}(\Omega)$.

De plus, les normes de $Q_\lambda$ vérifient:

$$\|Q_\lambda\|_{0,0} \leqq \|G_\lambda\|_{0,0} \quad \|Q_\lambda\|_{0,2m} \leqq \|G_\lambda\|_{0,2m}. \tag{5.13}$$

Les inégalités (4.6) et (5.13) et le théorème du noyau d'Agmon prouvent que $Q_\lambda$ est intégral avec un noyau $Q_\lambda(x, y)$ continu, borné, positif tel que:

$$0 \leqq Q_\lambda(x, y) \leqq C \frac{|\lambda|^{n/2m}}{|\operatorname{Im} \lambda|} \tag{5.14}$$

pour tout $x, y \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Comme il est clair que $\int_\Omega Q_\lambda(x,x)dx$ est la norme nucléaire de $Q_\lambda$ et que $((\lambda_j-\lambda)^{-1})$ est la suite des valeurs propres de $G_\lambda$, la définition de $Q_\lambda$ prouve que (en vertu d'un résultat classique sur les opérateurs nucléaires):

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_j-\lambda|}\leqq\int_\Omega Q_\lambda(x,x)dx. \tag{5.15}$$

Alors (5.12) (5.14) et (5.15) prouvent le lemme.

Pour étudier le comportement asymptotique des valeurs propres, nous allons suivre la méthode de S. Agmon [4]: elle consiste à utiliser une formule concernant la transformation de Stieljes d'une mesure positive établie par A. Pleijel [12]. Cette formule est la suivante:

Lemme 5.3. *Soit $\sigma(t)$ une fonction non décroissante définie sur $\mathbf{R}_+$.*
*Soit, pour $\lambda\notin\mathbf{R}_+$:*

$$f(\lambda)=\int_0^\infty\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}.$$

*Soit $t$ et $\tau$ deux nombres réels positifs. Notons $\xi=t+i\tau$ et*

$$I(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L(\xi)}f(\lambda)d\lambda$$

*où $L(\xi)$ est une courbe orientée dans $\mathbf{C}$ joignant de $\bar\xi$ à $\xi$, ne rencontrant pas $\mathbf{R}_+$.*

*Alors*:

$$\left|I(\xi)-\frac{\tau}{\pi}\operatorname{Re}f(\xi)-\sigma(t)+\sigma(0)\right|\leqq\tau\operatorname{Im}f(\xi). \tag{5.16}$$

Nous pouvons énoncer le:

Lemme 5.4. *Notons $N(t)=N_+(t)+N_-(t)$.*
*Alors $N(t)$ a un comportement asymptotique de la forme*:
*Pour tout $0\leqq\theta<1/2$, on a*:

$$N(t)=\gamma t^{n/2m}+o(t^{(n-\theta)/2m})\quad t\to+\infty. \tag{5.17}$$

*Dans* (5.16), *$\gamma$ est la constante*

$$\gamma=(2\pi)^{-n}\int_\Omega dx\int_{\mathcal{A}'(x,\xi)<1}d\xi.$$

Preuve. Prolongeons au point 0 en posant $N_+(0)=N_-(0)=N(0)=0$. Pour $\lambda\notin\mathbf{R}_+$, écrivons:

$$f(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^2-\lambda}$$

sous la forme d'une transformée de Stieljes:

$$f(\lambda)=\int_0^{\infty}\frac{dN(\sqrt{t})}{t-\lambda}.$$

Pour $t>0$ et a une constante positive à choisir, notons:

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)} f(\lambda)d\lambda$$

où $L(t)$ est la courbe orientée de $\mathbf{C}$, joignant $t-iat^{1-(\theta/4m)}$ à $t+iat^{1-(\theta/4m)}$ ne rencontrant par $\mathbf{R}_+$. Alors (5.16) donne:

$$|I(t)-N(\sqrt{t})|\leqq(1+\pi^{-2})^{1/2}at^{1-(\theta/4m)}|f(t+iat^{1-(\theta/4m)})| \tag{5.18}$$

pour tout $t>0$.

Pour estimer la quantité du second membre de l'inégalité (5.18), écrivons:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2i\sqrt{-\lambda}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j-i\sqrt{-\lambda}}-\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j+i\sqrt{-\lambda}} \tag{5.19}$$

qui a lieu pour $\lambda$ tel que les valeurs $i\sqrt{-\lambda}$, $-i\sqrt{-\lambda}$ appartiennent à $\mathcal{R}$.

Il est facile de voir qu'il existe une région $\mathcal{D}$ de la forme

$$\mathcal{D}=\{\lambda\in\mathbf{C};\,|d(\lambda)|\geqq\alpha|\lambda|^{1-(1/4m)};\ \operatorname{Re}\lambda\geqq\beta>0\}$$

tel que pour $\lambda\in\mathcal{D}$, $\lambda$ a la propriété indiquée ci-dessus.

En vertu de (5.7), du Lemme 5.2 et de la relation (5.19), nous avons:

$$|f(\lambda)|\leqq\frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\left[|\lambda|^{(n-2m)/4m}+|\lambda|^{n-2m-1)/4m}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\right] \tag{5.20}$$

pour tout $\lambda\in\mathcal{D}$ tel que $d(\lambda)\geqq|\lambda|^{1-(\theta/4m)}$, $|\lambda|\geqq 1$.

Il existe un choix de $a$ convenable et $t_0>0$ assez grand pour que les valeurs $\lambda$ de la forme $\lambda=t+iat^{1-(\theta/4m)}$, $t\geqq t_0$, vérifient la condition de la validité de (5.20). Nous avons donc, en vertu de (5.18) (5.20):

$$N(\sqrt{t})=I(t)+0(t^{(n-\theta)/4m})\quad t\to+\infty. \tag{5.21}$$

Etudions maintenant $I(t)$.

En vertu du Lemme 5.1, il existe une constante $C>0$ telle que:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j - i\sqrt{-\lambda}} - (2\pi)^{-n}(-\lambda)^{(n-2m)/4m}\int_\Omega dx\int_{\mathbf{R}^n}\frac{d\xi}{\mathscr{A}'(x,\xi)-i}\right|$$

$$\leqq C|\lambda|^{(n-2m-1)/4m}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\log|\lambda|$$

$$\left|\sum_{j=0}\frac{1}{\lambda_j + i\sqrt{-\lambda}} - (2\pi)^{-n}(-\lambda)^{(n-2m)/4m}\int_\Omega dx\int_{\mathbf{R}^n}\frac{d\xi}{\mathscr{A}'(x,\xi)+i}\right| \tag{5.22}$$

$$\leqq C|\lambda|^{(n-2m-1)/4m}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\log|\lambda|$$

pour tout $\lambda \in \mathscr{D}$ tel que $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/4m)}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Notons

$$\rho(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{d\xi}{\mathscr{A}'(x,\xi)-i} \tag{5.23}$$

Comme $\mathscr{A}'(x,\xi) \geqq 0$, un calcul classique (cf. [2]) prouve que l'on a:

$$\operatorname{Re}\rho(x) = (2\pi)^{-n}\frac{\pi n}{4m}\frac{1}{\cos(\pi n/4m)}\int_{\mathscr{A}'(x,\xi)<1} d\xi$$

$$\operatorname{Im}\rho(x) = (2\pi)^{-n}\frac{\pi n}{4m}\frac{1}{\sin(\pi n/4m)}\int_{\mathscr{A}'(x,\xi)<1} d\xi. \tag{5.24}$$

La relation (5.19), les estimations (5.22) et le Lemme 4.2 prouvent que l'on a:

$$\left|f(\lambda) - (-\lambda)^{(n-4m)/4m}\int_\Omega \operatorname{Im}\rho(x)dx\right| \leqq C|\lambda|^{(n-4m-1)/4m}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\log|\lambda| \tag{5.25}$$

pour $\lambda \in \mathscr{D}$, tel que $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/4m)}$, $|\lambda| \geqq 1$.

Choisissons maintenant $L(t)$ pour $t > t_o$ de la manière suivante: $L(t) = D(t) \cup C(t)$ avec:

$$D(t) = \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\ \lambda = t + iu\ ;\ at^{1-(\theta/4m)} \leqq |u| \leqq at\}$$

$$C(t) = \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\ |\lambda| = (1+a^2)^{1/2}t, \operatorname{Re}\lambda \leqq t\}.$$

En vertu de (5.25), nous avons:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)}\left[f(\lambda) - (-\lambda)^{(n-4m)/4m}\int_\Omega \operatorname{Im}\rho(x)dx\right]d\lambda\right|$$

$$\leqq C\left[t^{(n+4m-1)/4m}\log t\int_{at^{1-(\theta/4m)}}^{at} u^{-2}du + t^{(n-4m-1)/4m}\log t\int_{C(t)} du\right]$$

pour $t \geqq t_0$.

Il vient de là:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)}\left[f(\lambda)-(-\lambda)^{(n-4m)/4m}\int_{\Omega}\operatorname{Im}\rho(x)dx\right]d\lambda\right| \leqq c\,t^{(n-1+\theta)/4m}\log t. \tag{5.26}$$

Par un calcul explicite, on vérifie que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L(t)}(-\lambda)^{(n-4m)/4m}d\lambda=\frac{4m}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4m}t^{n/4m}+o(t^{(n-\theta)/4m})\quad t\to+\infty. \tag{5.27}$$

La deuxième relation de (5.24); les estimations (5.21) (5.26) (5.27) prouvent que l'on a:

$$N(\sqrt{t})=\gamma t^{n/4m}+o(t^{(n-\theta)/4m})\quad t\to+\infty. \tag{5.28}$$

Alors (5.28) donc immédiatement (5.17).

Nous aurons besoin d'un résultat, type théorème d'Abel, concernant la transforme de Stieljes d'une mesure $d\sigma$; il ne semble pas être connu:

LEMME 5.5. *Soit $\sigma(t)$ une fonction numérique localement à variation bornée, définie sur $\mathbf{R}_+$. Supposons que $\sigma(t)$ a un comportement asymptotique de la forme:*

$$\sigma(t)=P\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}t^{\alpha}+o(t^{\alpha-\beta})\quad t\to+\infty \tag{5.29}$$

*avec $P\geqq 0$, $0<\alpha<1$, $\beta>0$.*

*Alors, pour $\lambda\notin\mathbf{R}_+$, l'intégrale de Stieljés $\int_0^\infty d\sigma(t)/(t-\lambda)$ est absolument convergente et on a:*

$$\int_0^\infty\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}dt=P(-\lambda)^{\alpha-1}+\frac{\sigma(0)}{\lambda}+o\left[|\lambda|^{\alpha-1-\beta}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\right]\quad |\lambda|\to\infty,\lambda\notin\mathbf{R}_+. \tag{5.30}$$

PREUVE. Comme $\alpha<1$, l'absolue convergence de l'intégrale est claire. Par une intégration par partie, on a:

$$\int_0^\infty\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}=\frac{\sigma(0)}{\lambda}+\int_0^\infty\frac{\sigma(t)}{(t-\lambda)^2}dt. \tag{5.31}$$

Utilisons la relation:

$$\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}}{t-\lambda}dt=(-\lambda)^{\alpha-1}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Par une intégration par partie, nous obtenons

$$\int_0^\infty\frac{t^{\alpha}}{(t-\lambda)^2}dt=(-\lambda)^{\alpha-1}\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}. \tag{5.32}$$

Des relations (5.31), (5.32), nous avons:

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} - P(-\lambda)^{\alpha-1} = \frac{\sigma(0)}{\lambda} + \int_0^\infty \frac{\sigma(t) - P(\sin \pi\alpha/\pi\alpha)t^\alpha}{(t-\lambda)^2} dt. \tag{5.33}$$

Il reste à estimer l'intégrale:

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{r(t)}{(t-\lambda)^2} dt = \int_0^{2|\lambda|} \frac{r(t)}{(t-\lambda)^2} dt + \int_{2|\lambda|}^\infty \frac{r(t)dt}{(t-\lambda)^2}$$

avec $r(t) = \sigma(t) - p(\sin \pi\alpha/\pi\alpha)t^\alpha$.

Il est facile de voir, en utilisant l'hypothèse (5.29), que l'on a:

$$\left| \int_0^{2|\lambda|} \frac{r(t)}{(t-\lambda)^2} dt \right| \leqq C \frac{|\lambda|^{\alpha-\beta+1}}{d(\lambda)^2}$$

(5.34)

$$\left| \int_{2|\lambda|}^\infty \frac{r(t)}{(t-\lambda)^2} dt \right| \leqq C|\lambda|^{\alpha-\beta-1}.$$

Alors (5.33) et (5.34) donnent (5.30).

**5.b. Preuve du Théorème 2.2.** Examinons d'abord le cas $2m > n$. Pour $\lambda \notin \mathbf{R}_+$, posons

$$g(\lambda) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\operatorname{Re}\lambda_j}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^2 - \lambda}$$

et écrivons $g(\lambda)$ sous la forme d'une transformée de Stieljés:

$$g(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dN_+(t)}{t-\lambda} - \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda}.$$

D'où, puisque $N(t) = N_+(t) + N_-(t)$:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dN(t)}{t-\lambda} - \frac{1}{2} g(\lambda). \tag{5.35}$$

Etudions d'abord le terme

$$h(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dN(t)}{t-\lambda}.$$

C'est la transformée de Stieljes de $d\sigma$ avec $\sigma(t) = \int_0^t \sqrt{\mu}\, dN(\sqrt{\mu})$.

Par une intégration par partie, on a:

$$\sigma(t) = \sqrt{t}\, N(\sqrt{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{N(\sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}} d\mu.$$

En utilisant le Lemme 5.4, nous avons, pour $0 \leqq \theta < 1/2$

$$\sigma(t) = \frac{n\gamma}{n+2m} t^{(n+2m)/4m} + o(t^{n+2m-\theta)/4m}) \quad t \to +\infty. \tag{5.36}$$

Le Lemme 5.5 prouve que l'on a:

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \frac{n}{4m} \frac{\gamma}{\cos(\pi n/4m)} (-\lambda)^{(n-2m)/4m} \\ &+ o\left[|\lambda|^{(n-2m-\theta)/4m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\right] \quad |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Etudions maintenant le terme $g(\lambda)$. Pour $\lambda \in \mathscr{D}$, $g(\lambda)$ s'écrit:

$$g(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j - i\sqrt{-\lambda}} + \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j + i\sqrt{-\lambda}} \right).$$

En utilisant de nouveau le Lemme 5.2, les estimations (5.22) et la première relation de (5.24), nous avons:

$$\left| g(\lambda) - \frac{\pi n}{4m} \frac{\gamma}{\cos(\pi n/4m)} (-\lambda)^{(n-2m)/4m} \right| \leqq C |\lambda|^{(n-2m-1)/4m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2 \log|\lambda| \tag{5.38}$$

pour $\lambda \in \mathscr{D}$ tel que $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/4m)}$, $|\lambda| \geqq 1$.

La formule (5.35) et les estimations (5.37) (5.38) prouvent que l'on a:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda} = o\, |\lambda|^{(n-2m-\theta)/4m} \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2 \tag{5.39}$$

avec $|\lambda| \to +\infty$ et vérifiant $d(\lambda) \geqq |\lambda|^{1-(\theta/4m)}$.

Notons maintenant:

$$\underline{\sigma}(t) = \int_0^t \sqrt{\mu}\, dN_-(\sqrt{\mu}). \tag{5.40}$$

Nous allons utiliser de nouveau la formule de Pleijel pour estimer $\underline{\sigma}(t)$.

Dans le cas présent, pour $t \geqq t_0$, prenons $L(t)$ l'arc de cercle orienté de $\mathbf{C}$, joignant $t - iat$ à $t + iat$ (avec $t_0$ et a les choix effectués dans la preuve du Lemme 5.4):

$$L(t) = \{\lambda \in \mathbf{C}\,; |\lambda| = (1+a^2)^{1/2} t\,; \operatorname{Re} \lambda \leqq t\}.$$

Alors, si l'on pose:

$$I_-(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{L(t)} d\lambda \int_0^\infty \frac{d\underline{\sigma}(t)}{\tau - \lambda}. \tag{5.41}$$

Nous avons, en vertu de (5.16) et (5.39):

$$I_-(t) = \underline{\sigma}(t) + o(t^{(n+2m-\theta)/4m}) \quad t \to +\infty. \tag{5.42}$$

D'autre part, (5.39) et (5.41) donnent:

$$I_-(t) = o(t^{(n+2m-\theta)/4m}) \quad t \to +\infty. \tag{5.43}$$

Donc, (5.42) et (5.43) prouvent que l'on a:

$$\underline{\sigma}(t) = o(t^{n+2m-\theta)/4m}) \quad t \to +\infty. \tag{5.44}$$

De la relation (5.40), nous avons:

$$N_-(\sqrt{t}) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\underline{\sigma}(\mu)}{\sqrt{\mu}} + N(\sqrt{t_0}).$$

En intégrant par partie l'intégrale du second membre et en utilisant (5.44), nous obtenons:

$$N_-(t) = o(t^{(n-\theta)/2m}) \quad t \to +\infty. \tag{5.45}$$

Comme $N_+(t) = N(t) - N_-(t)$, les estimations (5.17) et (5.45) terminent la preuve du Théorème 2.2 dans le cas $2m > n$.

Supposons maintenant que $2m \leqq n$. Grâce à l'hypothèse (i) du Théorème 2.2, les opérateurs $A^k$ et $A^{*k}$ ont leurs images dans $H_{2km}(\Omega)$ avec $2km > n$. On a $(A^k)^* = A^{*k}$.

Alors, d'après la définition même de $A^k$, il est facile de voir qu'il existe une région $\mathcal{R}_k$, contenue dans l'ensemble résolvant commun de $A^k$ et $A^{*k}$, de la forme

$$\mathcal{R}_k = \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, |\operatorname{Im}\lambda| \geqq C(1 + |\lambda|)^{1-(1/2km)}\}.$$

Nous allons nous ramener au cas précédent en remarquant que $(\lambda_j^k)$ est la suite des valeurs propres de $A^k$ et que l'estimation (5.8) du Lemme 5.2 est remplacée dans le cas présent par:

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k - \lambda} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^k - \lambda} \right| \leqq C|\lambda|^{(n-2km-1)/2km} \left( \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} \right)^2 \tag{5.46}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_k$.

En effet, écrivons:

$$\frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k - \lambda} - \frac{1}{\lambda_j^k - \lambda} = \frac{\lambda_j^k - (\operatorname{Re}\lambda_j)^k}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k - \lambda} \frac{1}{\lambda_j^k - \lambda}.$$

Pour estimer le terme $a_j = (\lambda_j^k - (\operatorname{Re}\lambda_j)^k)/((\operatorname{Re}\lambda_j)^k - \lambda)$, écrivons encore $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2$ avec:

$$\mathbf{N}_1 = \{j\ ;\ |\operatorname{Re}\lambda_j|^k > 2|\operatorname{Re}\lambda|\}\ ;\ \mathbf{N}_2 = \{j\ ;\ |\operatorname{Re}\lambda_j|^k \leqq 2|\operatorname{Re}\lambda|\}.$$

Pour $j \in \mathbf{N}_1$, un calcul facile donne:

$$|a_j| \leqq c \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} |\operatorname{Re}\lambda_j|^{-l/2m}.$$

Comme $\lambda_j \notin \mathcal{R}$ et $j \in \mathbf{N}_1$, nous obtenons de l'inégalité précédente:

$$|a_j| \leqq c\,|\lambda|^{-1/2km} \tag{5.47}$$

pour tout $j \in \mathbf{N}_1$, $\lambda \in \mathcal{R}_k$.

Pour $j \in \mathbf{N}_2$, nous utilisons la majoration:

$$|a_j| \leqq c \frac{|\operatorname{Re}\lambda_j|^k \left(\sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} |\operatorname{Re}\lambda_j|^{-l/2m}\right)}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Comme $\lambda_j \notin \mathcal{R}$ et $j \in \mathbf{N}_2$, nous obtenons de là:

$$|a_j| \leqq c\,|\lambda|^{-1/2km} \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{5.48}$$

pour tout $j \in \mathbf{N}_2$, $\lambda \in \mathcal{R}_k$.

Puisque $\mathcal{D}(A^k) \subset H_{2km}(\Omega)$, nous avons, comme dans le Lemme 5.2:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j^k - \lambda|} \leqq c \frac{|\lambda|^{n/2km}}{|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{5.49}$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_k$.

Alors (5.47) (5.48) (5.49) prouvent (5.46).

(5.46) et la formule

$$\int_0^\infty \frac{dN(t^{1/2k})}{t-\lambda} = \frac{1}{2i\sqrt{-\lambda}} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k - i\sqrt{-\lambda}} - \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k + i\sqrt{-\lambda}} \right)$$

permettent d'utiliser les résultats de **5.a** et d'obtenir la même conclusion (5.17) pour $N(t)$.

De plus, l'hypothèse $k$ impair permet de séparer $N_+$ et $N_-$ par la formule:

$$\int_0^\infty \frac{t^{1/2} dN_+(t^{1/2k})}{t-\lambda} - \int_0^\infty \frac{t^{1/2} dN_-(t^{1/2k})}{t-\lambda}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k - i\sqrt{-\lambda}} + \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^k - i\sqrt{-\lambda}} \right)$$

et les conclusions du Théorème 2.2 découlent de l'étude du cas $2m > n$.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problem*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 119–147.

2. S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Princeton, N. J., Van Nostrand Mathematical Studies, 1965.

3. S. Agmon, *On kernels, eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 627–663.

4. S. Agmon, *Asymptotic formules with remainder estimater for eigenvalues of elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal., **28** (1968), 165–183.

5. S. Agmon and Y. Kannai, *On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvant kernels of elliptic operators*, Israel J. Math. **5** (1967), 1–30.

6. L. Hörmander, *On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators*, in *Yeshiva University Conference*, 1966, pp. 155–202.

7. J. J. Kohn and L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1972), 547–560.

8. K. Maruo, *Asymptotic distribution of eigenvalues of non-symmetric operators, associated with strongly elliptic sesquilinear form*, Osaka J. Math. **9** (1972), 547–560.

9. K. Maruo and H. Tanabe, *On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear form*, Osaka J. Math. **8** (1971), 323–345.

10. Pham The Lai, *Noyaux d'Agmon*, Séminaire Jean Leray–Collège de France, 1973.

11. Pham The Lai, *Classes de compacité d'opérateurs intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés*, Israel J. Math. **17** (1974), 364–379.

12. A. Pleijel, *On a theorem by P. Malliavin*, Israel J. Math. **1** (1963), 166–168.

13. R. Seeley, *Topics in pseudo-differential operators*, Centro Internazionale Matematico Estivo, 1969.

14. R. Seeley, *The resolvant of elliptic boundary problems*, Amer. J. Math. **91** (1969), 889–920.

INSTITUT DE MATHÉMATQUES
UNIVERSITÉ DE NANTES
NANTES, FRANCE